

答案与提示

第五章 空间解析几何

§1 向量的外积与混合积

1. (1) $\arccos\left(-\frac{9}{\sqrt{105}}\right)$; (2) $-\frac{12}{\sqrt{10}}$; (3) $(-72, -147, -12)$; (4) -100 ;

(5) $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ 和 $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$; (6) $3\lambda - 2\mu = 0$.

2. 提示: 考虑它们的内积。

3. 略。

4. 略。

5. 提示:

$$S = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}\| = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 - c_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 - c_2 & b_2 - c_2 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_1 - c_1 & b_1 - c_1 & c_1 \\ a_2 - c_2 & b_2 - c_2 & c_2 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

6. $\frac{1}{2}\sqrt{1562}$ 。

7. $\frac{45}{2}$ 。

§2 平面和直线

1. (1) $11x + 46y + 14z - 46 = 0$; (2) $3x + z = 0$; (3) $y = -5$;

(4) $9y - z - 2 = 0$; (5) $x + y - 3z + 4 = 0$ 。

2. $(1, -1, 3)$ 。

3. (1) $\frac{x-3}{-4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$; (2) $\begin{cases} x+3=0, \\ z-1=0; \end{cases}$ (3) $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{-4}$ 。

4. (1) $\frac{x+5}{-2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-11}{5}$; (2) $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{7}$ 。

5. (1) $13x - 4y + 14z + 7 = 0$; (2) $5x + 2y + z - 9 = 0$; (3) $x + y + 2z + 2 = 0$ 。

6. $\frac{x+1}{16} = \frac{y}{19} = \frac{z-4}{28}$ 。

7. $2x + 2y - 2z - 1 = 0$ 。

8.
$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

9. $\frac{4\sqrt{26}}{13}$ 。

10. $\frac{11\sqrt{146}}{146}$ 。

11. $\frac{\sqrt{84}}{7}$ 。

12. $\sqrt{\frac{1139}{30}}$ 。

13. $\sqrt{6}$ 。

14. 1。

15. (1) $\arccos \frac{\sqrt{6}}{21}$; (2) 0; (3) 0。

16. 垂直。

17. 提示: 所求平面的法向量可取为 $\mathbf{n} = (A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2)$, 则该平面的方程为 $\mathbf{n} \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$, 即

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0。$$

18. 提示: 过 A 点作与平面 $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p$ 垂直的直线, 其参数方程

$$\text{为 } \begin{cases} x = a + t \cos \alpha, \\ y = b + t \cos \beta, \\ z = c + t \cos \gamma. \end{cases} \text{ 它与平面的交点对应于参数}$$

$$t = p - (a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma) = -\delta。$$

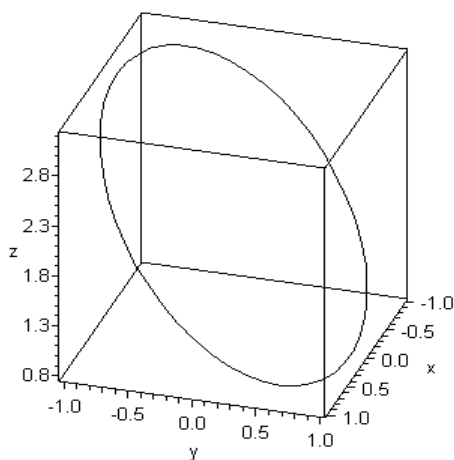
于是 A' 对应于参数 $t = -2\delta$, 其坐标为 $(a - 2\delta \cos \alpha, b - 2\delta \cos \beta, c - 2\delta \cos \gamma)$ 。

§3 曲面、曲线和二次曲面

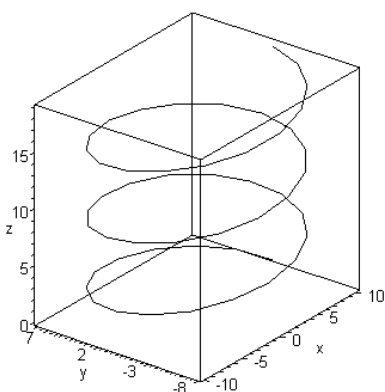
1. $x^2 + y^2 = 4pz$ 。
2. $\frac{x^2 + y^2}{a^2 - c^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ 。
3. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4x + 6y + 8z - 29 = 0$ 。
4. $z^2 = 5\sqrt{x^2 + y^2}$ 。
5. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 。
6. 绕 x 轴: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2 + z^2}{4} = 1$; 绕 y 轴: $\frac{x^2 + z^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 。
7. $(4, -3, 2)$ 。
8. $2y - 2z - 1 = 0$ 。
9. $x^2 - \frac{17}{4}y^2 + z^2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4} = 0$ 。
10. 答案见下表:

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
平面	两条直线	抛物线	圆	双曲线	点	两个点
空间	两张平面	抛物柱面	圆柱面	双曲柱面	直线	两条直线

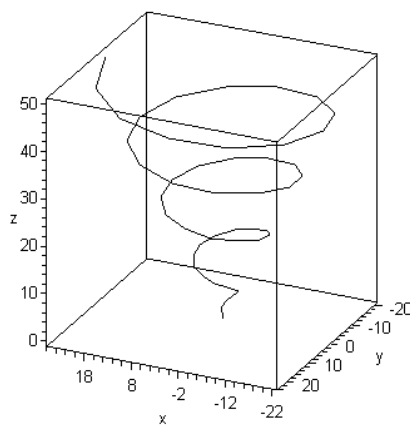
11. (1) 椭圆



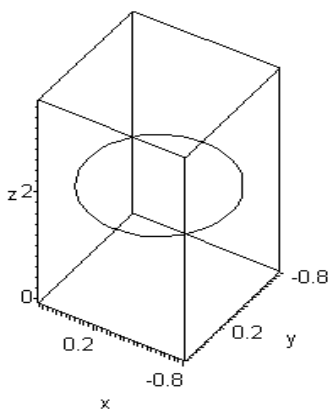
(2) 椭圆柱螺线



(3) 圆锥螺线



(4) 圆



12. (1) 椭球面; (2) 椭圆抛物面; (3) 单叶双曲面; (4) 双叶双曲面。图略。

13. (1) $u^2 - 2v^2 + 4w^2 = \frac{17}{4}$, 单叶双曲面; (2) $-2u^2 + 3v^2 + 6w^2 = -\frac{16}{9}$, 双叶

双曲面; (3) $-2u^2 + (1+\sqrt{3})v^2 + (1-\sqrt{3})w^2 = 1$, 双叶双曲面。