答案与提示

第七章 多元函数微分学

§1 多元函数的极限与连续

1．（1）0；（2）2；（3）0；（4）不存在；
（5）0；（6）不存在；（7）0；（8）不存在。

2．（1）$\ln 2$；（2）0；（3）$-\dfrac{8}{5}$；（4）0。

3．（1）不连续；（2）不连续；（3）连续。

4．（1）当 $x \neq m\pi$ 且 $y \neq n\pi$（$m, n \in \mathbf{Z}$）时连续；（2）当 $x^2 + y^2 < 1$ 时连续；
（3）除点 (a, b) 外都连续。

5．（1）当 $|x| \neq |y|$ 时连续；（2）除点 $(0, 0)$ 外都连续。

§2 全微分与偏导数

1．（1）$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + 6xy - xy^3$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^3 + 3x^2 - 3xy^2$；

（2）$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2} + \dfrac{1}{y}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{y^2}$；

（3）$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2 \cos\frac{y}{x} \sin\frac{y}{x}}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{x \cos\frac{y}{x} \sin\frac{y}{x}}$；

（4）$\dfrac{\partial z}{\partial x} = x^{xy} y(\ln x + 1)$，$\dfrac{\partial z}{\partial x} = x^{xy+1} \ln x$。

2．（1）$z'_x(1, 2) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$z'_y(1, 2) = -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$；

（2）$u'_x(1, 2, -1) = -\dfrac{\sqrt{6}}{36}$，$u'_y(1, 2, -1) = -\dfrac{\sqrt{6}}{18}$，$u'_z(1, 2, -1) = \dfrac{\sqrt{6}}{36}$；

（3）$u'_x(-2, 1, 2) = (3\cos 6 - 2\sin 6)e^{-2}$，$u'_y(-2, 1, 2) = 4e^{-2}\cos 6$，
$u'_z(-2, 1, 2) = -5e^{-2}\sin 6$；

（4）$u'_x\left(\dfrac{\pi}{4},1\right)=1$。

3．（1）$(2axy+2bx)dx+ax^2dy$；

（2）$4\tan(x^2+y^2)\sec^2(x^2+y^2)(xdx+ydy)$；

（3）$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}dx-\dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}(x+\sqrt{x^2-y^2})}dy$；

（4）$(e^{-y}-ye^{-x})dx+(e^{-x}-xe^{-y})dy$；

（5）$-\dfrac{2xy}{x^4+y^2}dx+\dfrac{x^2}{x^4+y^2}dy$；

（6）$-e^{x^2}dx+e^{y^2}dy$。

4．倾角：$\arctan 2$，切线方程：$\begin{cases} z-2x-y+5=0, \\ y=2. \end{cases}$

5．（1）不可微；（2）不可微。

6．（1）2.847；（2）-0.28。

7． $3.2\,\mathrm{cm}^2$。

8．（1）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-a^2\sin(ax-by)$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=ab\sin(ax-by)$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-b^2\sin(ax-by)$；

（2）题目应为：$u=e^{ax}\cos by$。

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2e^{ax}\cos by$；$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-abe^{ax}\sin by$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-b^2e^{ax}\cos by$；

（3）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^3e^{xy}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(xy^2+2y)e^{xy}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(x^2y+2x)e^{xy}$；

（4）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{x^{\ln y}\ln y(\ln y-1)}{x^2}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{x^{\ln y}(\ln x\ln y+1)}{xy}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{x^{\ln y}\ln x(\ln x-1)}{y^2}$。

9． $f'_x(0,y)=\begin{cases} -y, & y\neq 0, \\ 0, & y=0, \end{cases}$ $f'_y(x,0)=\begin{cases} x, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

$f''_{xy}(0,0)=-1$，$f''_{yx}(0,0)=1$。

10．略。

11．略。

12．提示：$u'_{x_i}=(2-n)x_i(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{-\frac{n}{2}}$，

$$u''_{x_ix_i}=(n-2)nx_i^2(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{-\frac{n}{2}-1}+(2-n)(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{-\frac{n}{2}}\quad（i=1,\cdots,n）。$$

13．（1）$J=\begin{pmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x\sin y & e^x\cos y \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^x\cos y dx-e^x\sin y dy \\ e^x\sin y dx+e^x\cos y dy \end{pmatrix}$；

（2）$J=\begin{pmatrix} \dfrac{x}{x^2+y^2} & \dfrac{y}{x^2+y^2} \\ -\dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2} \\ \dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$。

14．（1）$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。

15．$8x+8y-z-12=0$。

16．$\begin{cases} \dfrac{x}{-2}=\dfrac{z-\pi/2}{1}, \\ y=1. \end{cases}$

17．$\dfrac{x-\dfrac{\pi}{2}+1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$。

18．$(-1,1,-1)$ 和 $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},-\dfrac{1}{27}\right)$。

§3 链式求导法则

1．$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x\ln(3x-2y)}{y^2}+\dfrac{3x^2}{y^3(3x-2y)}$，

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2x^2\ln(3x-2y)}{y^3}-\dfrac{2x^2}{y^2(3x-2y)}$。

2．$\dfrac{\partial w}{\partial u}=2u+2v+2uv^2+\cos(u+v+uv)(1+v)$，

$\dfrac{\partial w}{\partial v}=2u+2v+2u^2v+\cos(u+v+uv)(1+u)$。

3．$\dfrac{\partial z}{\partial r}=3r^2\sin\theta\cos\theta(\cos\theta-\sin\theta)$，

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=r^3(-2\sin^2\theta\cos\theta+\sin^3\theta+\cos^3\theta-2\sin\theta\cos^2\theta)。$$

4. $\dfrac{dz}{dt}-\dfrac{3+12t^2}{\sqrt{1-9t^2-24t^4-16t^6}}$。

5. $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{e^x(1+x)}{1+x^2e^{2x}}$。

6. $\dfrac{du}{dx}=e^{ax}\sin x$。

7.（1）$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xf_1'+ye^{xy}f_2'$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'$；

（2）$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{y}f_1'-\dfrac{y}{x^2}f_2'$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}f_1'+\dfrac{1}{x}f_2'$。

8. $\varphi'(1)=17$。

9. 略。

10. 提示：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=y+f\left(\dfrac{y}{x}\right)-\dfrac{y}{x}f'\left(\dfrac{y}{x}\right)$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=x+f'\left(\dfrac{y}{x}\right)$。

11.（1）$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2f_{11}''$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xyf_{11}''+yf_{12}''+f_1'，$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2f_{11}''+2xf_{12}''+f_{22}''；$$

（2）$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{11}''+\dfrac{2}{y}f_{12}''+\dfrac{1}{y^2}f_{22}''$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{y^2}\left(xf_{12}''+\frac{x}{y}f_{22}''+f_2'\right)，$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2}{y^4}f_{22}''+\frac{2x}{y^3}f_2'。$$

（3）$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\cos xf_1'+\sin^2 xf_{11}''$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\sin x\sin y f_{12}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\cos y f_2'+\sin^2 y f_{22}'';$$

（4）$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2yf_1'+4x^2y^2f_{11}''+4xy^3f_{12}''+y^4f_{22}''$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf_1'+2yf_2'+2x^3yf_{11}''+5x^2y^2f_{12}''+2xy^3f_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2xf_2'+x^4f_{11}''+4x^3yf_{12}''+4x^2y^2f_{22}''。$$

12．$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f_{11}''+2f_{12}''+2yf_{13}''+f_{22}''+2yf_{23}''+y^2f_{33}''$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f_{11}''+(x+y)f_{13}''-f_{22}''+(x-y)f_{23}''+xyf_{33}''+f_3'。$$

13．$-2e^{-x^2y^2}$。

14．提示：直接计算各个导数。

15．

$$\begin{pmatrix} \dfrac{t^2-2st-s^2}{(s^2+t^2)^2} & \dfrac{s^2-2st-t^2}{(s^2+t^2)^2} \\ \dfrac{t(t^2-3s^2)}{(s^2+t^2)^3} & \dfrac{s(s^2-3t^2)}{(s^2+t^2)^3} \\ -\dfrac{t}{s^2} & \dfrac{1}{s} \end{pmatrix}。$$

16．$\dfrac{2}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x\ln\sqrt{x^2+y^2}-y\arctan\dfrac{y}{x} & y\ln\sqrt{x^2+y^2}+x\arctan\dfrac{y}{x} \\ x\ln\sqrt{x^2+y^2}+y\arctan\dfrac{y}{x} & y\ln\sqrt{x^2+y^2}-x\arctan\dfrac{y}{x} \end{pmatrix}$。

17．略。

18．λ，μ 是方程 $A+2Br+Cr^2=0$ 的两个根。

19．$\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$。

§4 隐函数微分法及其应用

1．（1）$\frac{dy}{dx}=-\frac{e^x+\cos(x+y)+y}{\cos(x+y)+x}$；（2）$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x\cos y+e^y\cos x}{e^x\sin y-e^y\sin x}$。

2．（1）$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y-z}{2yz-x-12z^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z^2+x}{2yz-x-12z^2}$；

（2）$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\cos x\sin x}{\cos z\sin z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\cos y\sin y}{\cos z\sin z}$；

（3）$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}$；

（4）$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y(x+z)}$。

3．$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_1'+F_2'+F_3'}{F_3'}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_2'+F_3'}{F_3'}$。

4．略。

5．$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}$。

6．$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y^2z(2e^z-2xy-ze^z)}{(e^z-xy)^3}$。

7．（1）$\begin{pmatrix}-\frac{x+6xz}{2y(1+3z)}\\ \frac{x}{1+3z}\end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix}\frac{z-x}{y-z}\\ \frac{x-y}{y-z}\end{pmatrix}$。

8．（1）$\frac{1}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}\begin{pmatrix}u\sin v & -u\cos v\\ \cos v-e^u & e^u+\sin v\end{pmatrix}$。

（2）

$$\frac{-1}{2xvyf_1'g_2'-xf_1'-2vyg_2'-f_2'g_1'+1}\begin{pmatrix}2uvyf_1'g_2'-uf_1'+f_2'g_1' & f_2'[(2vy-v^2)g_2'-1]\\ -g_1'[(u+x)f_1'-1] & -f_2'g_1'+xv^2f_1'g_2'-v^2g_2'\end{pmatrix}。$$

9．提示：对 $y=f(x,t)$ 和 $F(x,y,t)=0$ 分别关于 x 求导，再解出 $\frac{dy}{dx}$。

10．$x+2y-4=0$。

11．$x-y+2z-\dfrac{\sqrt{22}}{2}=0$和$x-y+2z+\dfrac{\sqrt{22}}{2}=0$。

12．提示：先求出切平面的方程，再算截距。

13．$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{3}{2}(y-x^2)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{3}{2}x$。

14．$4x-2y-3z-3=0$。

15．$x_0x+y_0y+z_0z=a^2$。

16．$\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$。

17．提示：都过点(a,b,c)。

§5 方向导数、梯度

1．$1+2\sqrt{3}$。

2．$\dfrac{98}{13}$。

3．$-2n\sqrt{n}$。

4．$\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}$的最大值为$\sqrt{14}$，沿$(1,2,3)$方向；

$\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}$的最小值为$-\sqrt{14}$，沿$(-1,-2,-3)$方向。

5．$\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,1,1)}=\dfrac{11}{7}$。

6．（1）$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)$；

（2）$\dfrac{1}{(x+y+z)^2}\big((y+z)yz,(x+z)xz,(x+y)xy\big)$；

（3）$(1,1,\cdots,1)$。

7．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{l}^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\beta+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos^2\gamma$$
$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\alpha\cos\beta+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\cos\alpha\cos\gamma+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cos\beta\cos\gamma.$$

8．提示：（1）利用方向导数的计算公式，并注意$\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2\\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3\end{pmatrix}$是正交矩阵；

（2）利用第 7 题的结论。

§6 Taylor 公式

1．（1） $y-xy-\frac{1}{2}y^2+o(x^2+y^2)$；

（2） $x+y+z-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}z^2-xy-xz-yz+o(x^2+y^2+z^2)$。

2．

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{4}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2\right).$$

3． $\sum_{k=0}^{n}\frac{(x+y)^k}{k!}+o\left((x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}\right)$。

4． 85.74。

§7 极值

1． $f(1,1)=f(-1,-1)=-1$为极小值，无极大值。

2． $f\left(\frac{1}{2},-1\right)=-\frac{e}{2}$为极小值，无极大值。

3．无极值。

4． $(0,0)$，$(1,1)$，$(-1,1)$，$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{8}\right)$是驻点；$(0,0)$，$(1,1)$，$(-1,1)$不是极值点，$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{8}\right)$是极小值点，$f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{8}\right)=-\frac{1}{64}$为极小值。

5．提示：$(2n\pi, 0)$（$n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$）为极大值点。

6．（1）$z(-2, 0)=1$ 为极小值，$z\left(\frac{16}{7}, 0\right)=-\frac{7}{8}$ 为极大值。

（2）在点 $(0, 0, 0)$ 附近，$z(0, 0)=0$ 为极小值。在点 $(0, 0, 6)$ 附近，$z(0, 0)=6$ 为极大值。

7．f 的最小值为 0，在边界上取到，如 $f(0, 0)=0$。$f\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 为最大值。

8．f 的最大值为 $\max\{0, ae^{-1}, be^{-1}\}$，最小值为 $\min\{0, ae^{-1}, be^{-1}\}$。

9．提示：利用 $1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$。

10．$x=\frac{3\alpha-2\beta}{2\alpha^2-\beta^2}$，$y=\frac{4\alpha-3\beta}{2(2\alpha^2-\beta^2)}$。

11．$f(3, 3)=-18$ 为最小值，$f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)=\frac{64}{27}$ 为最大值。

12．当 $x=y=z=\sqrt[3]{2}$ 时用料最省。

13．$\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$。

14．点 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 到三顶点的距离的平方和为最小，最小值为 $\frac{4}{3}$。

点 $(0, 1)$ 和 $(1, 0)$ 到三顶点的距离的平方和为最大，最大值为 3。

15．$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$。

16．当 $x=\frac{bc}{ab+bc+ac}$，$y=\frac{ac}{ab+bc+ac}$，$z=\frac{ab}{ab+bc+ac}$ 时取最小值 $\frac{abc}{ab+bc+ac}$。

17．最短距离 $\sqrt{3}$（在 $(-1, 1, \pm 1)$ 点取到）。

18．最短距离 $\sqrt{9-5\sqrt{3}}$，它在 $\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 2-\sqrt{3}\right)$ 点取到；

最长距离$\sqrt{9+5\sqrt{3}}$，它在$\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{-1-\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3}\right)$点取到。

19．最短距离$\frac{\sqrt{3}}{6}$（它是点$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$到平面的距离）。

20．函数的最小值为 0（在$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$和$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$点取到）。

最大值为 12（在$\left(\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$和$\left(-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$点取到）。

21．长、宽、高分别为$\frac{2\sqrt{3}}{3}a$，$\frac{2\sqrt{3}}{3}b$，$\frac{\sqrt{3}}{3}c$时体积最大，最大值为$\frac{4\sqrt{3}}{9}abc$。

22．当$x=y=\frac{a}{2}$时取条件最小值$\frac{a^4}{16}$。证明略。

23．当$x=R$，$y=\sqrt{2}R$，$z=\sqrt{3}R$时取条件最大值$\ln\left(6\sqrt{3}R^6\right)$。利用所得的结论，再令$x^2=a$，$y^2=b$，$z^2=c$便推出所要证明的结论。

24．题目中R的关系应为：$R=15+14x_1+32x_2-x_1x_2-2x_1^2-8x_2^2$。

（1）当$x_1=\frac{64}{21}$，$x_2=\frac{38}{21}$时R取最大值；

（2）当$x_1=\frac{1}{4}$，$x_2=\frac{5}{4}$时R取条件$x_1+x_2=1.5$下的最大值。