复旦大学数学科学学院

2007～2008 学年第二学期期末考试试卷

☑ A 卷　☐ B 卷

课程名称：高等数学 B(下)　　课程代码：MATH120004.02.05

开课院系：数学科学学院　　考试形式：闭卷

姓　名：＿＿＿＿＿　学　号：＿＿＿＿＿　专　业：＿＿＿＿＿

<table>
<tr><td>题 号</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td rowspan="2">总 分</td></tr>
<tr><td>得 分</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>题 号</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>得 分</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

(以下为试卷正文)

注意：答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

1. （6 分）当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，函数 $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}$ 的极限是否存在，为什么？

极限不存在。

考察函数在曲线 $y=-x^2+x^6$ 上的变化情况.

$x\to0$ 时 $f(x,-x^2+x^6)=\dfrac{x^3+(-x^2+x^6)^3}{x^6}=\dfrac{x^3+o(x^3)}{x^6}$ 极限不存在

$\therefore$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时 $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}$ 无极限

2. （6 分）求由方程组 $\begin{cases}x=e^u+u\sin v\\ y=e^u-u\cos v\end{cases}$ 确定的映射 $(x,y)^T\to(u,v)^T$ 的 Jacobi 矩阵。

$$\begin{pmatrix}x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^u+\sin v, & u\cos v\\ e^u-\cos v & u\sin v\end{pmatrix}$$

$(x,y)^T\to(u,v)^T$ 的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix}u'_x & u'_y\\ v'_x & v'_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}u\sin v & -u\cos v\\ -e^u+\cos v & e^u+\sin v\end{pmatrix}}{u(e^u(\sin v-\cos v)+1)}$$

3. （6 分）求函数 $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+1$ 的极值。

$f'_x=4x^3-4y=0$ 极值可疑点：$(0,0)$

$f'_y=4y^3-4x=0$ $(1,1)$

$(-1,-1)$

$f''_{xx}=12x^2$, $f''_{xy}=-4$ $f''_{yy}=12y^2$

① 在 $(0,0)$ 处

$f''_{xx}\cdot f''_{yy}-(f''_{xy})^2=0-16<0$. 非极值点

② 在 $(1,1)$ 处

$f''_{xx}\cdot f''_{yy}-(f''_{xy})^2=12\cdot12-16>0$. $f''_{xx}>0$ 极小值点

③ 在 $(-1,-1)$ 处

$f''_{xx}\cdot f''_{yy}-f''_{xy}=12\cdot12-16>0$. $f''_{xy}>0$ 极小值点

$f(1,1)=1+1-4+1=-1$, $f(-1,-1)=1+1-4+1=-1$

4. （6 分）讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln^2 n}{n}$ 的收敛性（包括条件收敛与绝对收敛）。

① $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln^2 n}{n}$ 为交错级数

∵ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = 0$.

并且 $\left(\frac{\ln^2 x}{x}\right)' = \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2}$ 当 $\ln x > 2$ 时 $\left(\frac{\ln^2 x}{x}\right)' < 0$.

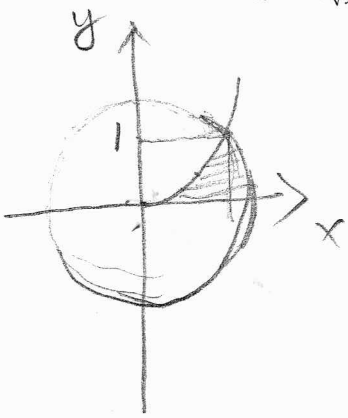
∴ 当 $\ln n > 2$ 时 $\frac{\ln^2 n}{n}$ 单调下降并趋于零

∴ $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln^2 n}{n}$ 是莱布尼茨级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln^2 n}{n}$ 收敛.

② $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n}$ ∵ $\frac{\ln^2 n}{n} > \frac{1}{n}$ 当 $\ln n > 1$ 时

∴ 发散. ∴ $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln^2 n}{n}$ 条件收敛.

5. （6 分）交换 $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$ 的积分顺序。



$$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$$
$$= \int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$$

6. （6 分）求微分方程 $\sin x\cos y\,dx + \sin y\cos x\,dy = 0$ 的通解。

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x\cos y}{\sin y\cos x}$$

∴ $\frac{\sin y}{\cos y}dy = -\frac{\sin x}{\cos x}dx$

$$\int\frac{\sin y}{\cos y}dy = -\int\frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$$-\ln|\cos y| = \ln|\cos x| + C_1$$

$$\frac{1}{\cos y} = \tilde{C_1}\cos x$$

通解 $\cos x\cos y = C$.

7. （8 分）求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$的和函数。

$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ $\quad x\,s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-x=-\ln(1-x)-x$

$\therefore s(x)=\begin{cases}\frac{-\ln(1-x)}{x}-1 & x\in[-1,1),\ x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

8. （10 分）设$f(x)$具有二阶连续偏导数，$z=f(e^x\sin y)$满足$z''_{xx}+z''_{yy}=e^{2x}z$，求$f(x)$。

令 $u=e^x\sin y$

$z'_x=f'(u)\cdot u'_x=f'(u)e^x\sin y$

$z''_{xx}=(f'(u)e^x\sin y)'_x=f''(u)(e^x\sin y)^2+f'(u)e^x\sin y$

$z'_y=f'(u)\,u'_y=f'(u)e^x\cos y$

$z''_{yy}=(f'(u)e^x\cos y)'_y=f''(u)(e^x\cos y)^2-f'(u)e^x\sin y$

$z''_{xx}+z''_{yy}=f''(u)\cdot e^{2x}=e^{2x}\cdot z$

$f''-f=0$

$\lambda^2-1=0\quad \lambda=\pm 1$

$f(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$

9. （10 分）设 $f(x,y)=\begin{cases} x^2\arctan\dfrac{y}{x}+y^2\arctan\dfrac{x}{y}, & xy\neq 0 \\ 0, & xy=0 \end{cases}$，求 $f_x'(0,y)$，$f_y'(x,0)$，$f_{xy}''(0,0)$，$f_{yx}''(0,0)$。

$$f_x'(0,y)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\arctan\frac{y}{x}+y^2\arctan\frac{x}{y}}{x}=y$$

$$f_y'(x,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{x}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{x^2\arctan\frac{y}{x}+y^2\arctan\frac{x}{y}}{y}=x$$

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$$

$$f_{xy}''(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f_x'(0,y)-f_x'(0,0)}{y}=1$$

$$f_{yx}''(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f_y'(x,0)-f_y'(0,0)}{x}=1$$

10. （12 分）设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又

$g(x,y)=f\left(\dfrac{1}{2}(x^2-y^2),xy\right)$，求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$。

令 $u=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$，$v=xy$.

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot y.$$

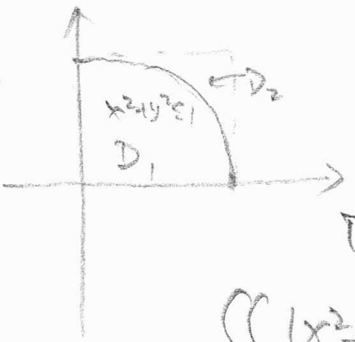
$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot(-y)+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot x$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot y\right)\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)x+\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\cdot y.\\&=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}x^2+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot xy+\frac{\partial f}{\partial u}\\&\quad+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot xy+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot y^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}(-y)+\frac{\partial f}{\partial v}x\right).\\&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)(-y)-\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\cdot x\\&=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}y^2-\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot xy-\frac{\partial f}{\partial u}.\\&\quad+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}x\cdot(-y)+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}x^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}&=(x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\\&=x^2+y^2\end{aligned}$$

11. （10 分）求二重积分 $\iint\limits_D \left|x^2+y^2-1\right| d\sigma$ ，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$。



$$D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$$

$$D_2=\left\{(x,y)\,\middle|\, \begin{array}{l} 0\le x\le 1 \\ \sqrt{1-x^2}<y\le 1 \end{array}\right\}$$

$$D=D_1\cup D_2 \qquad D_1\cap D_2=\phi$$

$$\iint\limits_D |x^2+y^2-1|\,d\sigma=\iint\limits_{D_1}(1-(x^2+y^2))\,d\sigma+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\,d\sigma.$$

$$\iint\limits_{D_1}(1-(x^2+y^2))\,d\sigma=\iint\limits_{D_1}d\sigma-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)\,d\sigma. \quad \begin{array}{ll} x=r\cos\theta & 0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \\ y=r\sin\theta & 0\le r\le 1 \end{array}$$

$$=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^2\cdot r\,dr=\frac{\pi}{8}$$

$$\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\,d\sigma=\iint\limits_{D}(x^2+y^2-1)\,d\sigma-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)\,d\sigma.$$

$$=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\,d\sigma-\iint\limits_{D}d\sigma-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)\,d\sigma$$

$$=\int_0^1dx\int_0^1(x^2+y^2)\,dy-1+\frac{\pi}{8}$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{3}$$

$$\therefore \iint\limits_D|x^2+y^2-1|\,d\sigma$$

$$=\iint\limits_{D_1}(1-(x^2+y^2))\,d\sigma+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\,d\sigma$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$$

12. （14 分）验证函数 $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty)$ 满足微分方程

$y''+y'+y=e^x$，并求出幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数。

$y'=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\cdots$

$y''=x+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\cdots$

$y''+y'+y=(1+x+\frac{x^2}{2!})+(\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!})+\cdots$

$+(\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\frac{x^{3n}}{(3n)!})+\cdots$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$

ii. 对于 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ $x=0$ 时 $y(0)=1$

$x=0$ 时 $y'(0)=0$ $\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数

就是 $\begin{cases} y''+y'+y=e^x \\ y(0)=1,\ y'(0)=0 \end{cases}$ 的解

$\lambda^2+\lambda+1=0$ $\lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

令 $y^*=ae^x$

$(a+a+a)e^x=e^x$ $a=\frac{1}{3}$

通解 $y=e^{-\frac{x}{2}}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)+\frac{1}{3}e^x$

$y'(x)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$

$+e^{-\frac{x}{2}}(-\frac{\sqrt{3}}{2}C_1\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x)+\frac{1}{3}e^x$

$\begin{cases} 1=y(0)=C_1+\frac{1}{3} \\ 0=y'(0)=-\frac{1}{2}C_1+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2+\frac{1}{3} \end{cases}$ $C_1=\frac{2}{3}$ $C_2=0$

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^x$