

复旦大学数学科学学院

2016~2017学年第一学期期末考试试卷

□ A 卷

课程名称: 高等数学B(上) 课程代码: MATH 120003

开课院系: 数学科学学院 考试形式: 闭卷

题 目	一	二	三	四	五	六	七	总分
得 分								

一、计算题(每小题6分, 共48分)

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{2n-1}{3 \cdot 2^{n-1}} \right)$.

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{1 - \sqrt{1-x^2}}$.

(装订线内不要答题)

3. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^{\frac{1}{3}}} \left(1 - x^{-\frac{1}{3}}\right)^{x^{\frac{2}{3}}}$.

4. 设 $y = \sqrt{e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x \sqrt{\cos x}}}$. 求 y' .

5. 求不定积分 $\int \sec x \tan^2 x dx$.

6. 求定积分 $\int_{e^{\frac{1}{4}}}^{e^{\frac{1}{2}}} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$.

(装订线内不要答题)

7. 求定积分 $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$, $b > 0$.

8. 求点 $(0, 4, 2)$ 到直线 $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{4}$ 的距离.

二、（本题满分8分）求函数 $y = (x - 2)(x + 1)^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

三、（本题满分8分）设 $0 < a < b$. 证明至少存在一点 $c \in (a, b)$ 使得

$$\frac{\sin b - \sin a}{b^2 - a^2} = \frac{\cos c}{2c}.$$

（装订线内不要答题）

四、（本题满分8分）记在直角坐标系中过点 $(1, 0, 0)$ 和 $(-1, 2, 2)$ 的直线绕 z 轴旋转一周所得的旋转曲面为 S . 求由 S 及两平面 $z = 0$, $z = 1$ 所围成的立体的体积.

五、（本题满分8分） 已知

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

求 A .

（装订线内不要答题）

六、（本题满分10分） 证明：

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan x dx < \frac{\pi^2}{32}$.

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan x dx \geq \frac{\pi}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \frac{\ln 2}{16} \pi$.

七、（本题满分10分） 记

$$m_{j,k} = \int_0^{+\infty} x^{j+k} e^{-x} dx, \quad j, k = \{0, 1, 2, \dots\},$$

并定义 $n + 1$ 阶行列式

$$D_n = \det(m_{j-1,k-1})_{j,k=1,\dots,n+1},$$

以及 $q_0(x) = 1$,

$$q_k(x) = \frac{1}{D_{k-1}} \det \begin{pmatrix} m_{0,0} & m_{0,1} & \cdots & m_{0,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{k-1,0} & m_{k-1,1} & \cdots & m_{k-1,k} \\ 1 & x & \cdots & x^k \end{pmatrix}, \quad k \geq 1.$$

证明：

1. $D_n = \prod_{k=0}^n (k!)^2$. (注: $0! = 1$)

2. 若 $k \geq 1$, 则

$$\int_0^{+\infty} q_k(x) q_i(x) e^{-x} dx = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k-1.$$

（装订线内不要答题）