

复旦大学数学科学学院
2017~2018 学年第二学期期末考试试卷

A 卷

课程名称: 高等数学(B) 课程代码: MATH120004.01--04

开课院系: 数学科学学院 考试形式: 闭卷

题号	1	2	3	4	5	6	7	总分
得分								

一. 计算和简答题 (7分×7=49分) (答题时请写明过程!)

1. 设 $z^2 - 2xyz = 1$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

2. 设三元函数 $f(x, y, z) = \arcsin(x^2 + y + z^2)$ 。

- (1) 求函数在点 $P(\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2})$ 处函数值增加最快的方向;
- (2) 求函数在 P 点沿方向 $(1, -1, -1)$ 的方向导数。

3. 设空间曲面 $y^2 + 2z^2 = 3x$, (1) 求曲面在点 $(1,1,-1)$ 处的切平面方程;
(2) 求曲面与 $2x - 3y + 5z = 4$ 的交线在点 $(1,1,1)$ 处的切线方程。

4. 求平面上由4条直线 $x + 2y = 2$, $x + 2y = 5$ 和 $y = 2x$, $y = 2x - 1$ 所围闭区域的面积。

5. 求 $\iint_D (x + 2xy) dx dy$, 其中 $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \geq a^2, x^2 + y^2 \leq 2ax\}$

6. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-3)^n + 2^n}{4^n}$ 是否收敛? 如果收敛求其和。

7. 将函数 $f(x) = x(4 - x)$, $x \in (0,4)$ 展开成周期为4的Fourier级数, 并求级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和。

二. (10分) 求曲面 $y = x^2 + z^2$ 与平面 $x + y - z = 3$ 的交线到原点的最远和最近距离。

三. (10分) 求积分 $\iiint_{\Omega} (x + y) dx dy dz$, 其中 Ω 为两曲面:

$x^2 + z^2 = \frac{1}{4}(y + 1)^2$ 和 $y = 1 + \sqrt{1 - x^2 - z^2}$ 所围成的空间区域。

四. (11分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+1)} (x+1)^{n-1}$ 的收敛域与和函数, 并求级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n}$ 的和。

五. (10分) 设 $f(x)$ 有一阶连续的导函数, $f(0) = 0$; 且微分方程:

$(yf(x) + y^2 + 2xy)dx + (f(x) + 2xy)dy = 0$ 是全微分方程。

(1) 求 $f(x)$, (2) 写出全微分方程的通解。

六. (10分) 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的二阶可导函数, 且已知 $f(0) = 0$, 并满足等式
 $f(x) + 2f'(\pi + x) = \sin 3x$, 求 $f(x)$.