

# 复旦大学数学科学学院

## 2012 ~2013 学年第 一 学期期末考试试卷

### A 卷

课程名称: 高等数学 (B 上) 课程代码: MATH120003.04

开课院系: 数学科学学院 考试形式: 闭卷

姓 名: \_\_\_\_\_ 学 号: \_\_\_\_\_ 专 业: \_\_\_\_\_

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总分
得分											

一. (15 分, 每小题 5 分) 求下面的极限:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n-2} \right)^n$ ;

2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \ln(1+t^4) dt}{x^{\frac{5}{2}}}$ ;

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - \sin x + \ln(1+x)}{x \sin^2 x}.$

二. (15分, 每小题5分) 计算下面各题:

1. 设  $f(x) = x^2 \cos 2x$ , 求高阶导数  $f^{(10)}(x)$ ;

2. 计算定积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 2 \cos x}{3 \sin x + \cos x} dx$ ;

3. 设  $t \in (0, 1)$ , 计算积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan x)^{1-2t} dx$ .

三. (10分) 判断广义积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^4)}{x^p} dx$  的收敛性, 其中  $p$  是一个实参数。

四. (10分) 设  $\Gamma$  是空间曲线:  $y = e^{\frac{x^2}{2}}, z = 0, x \geq 0$ , 将该曲线绕坐标  $y$  轴旋转一周,  
1) 求所成曲面上的点满足的方程; 2) 求所成曲面与平面  $y = e$  围成的有界立体的  
体积。

五. (10分) 设  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , 证明:  $\frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{x}$ 。

六. (8分) 已知直线  $l$  经过点  $(11, 9, 0)$ , 且与直线  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{3}$  和直线  $\frac{x}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$  相交, 求直线  $l$  的方程。

七. (8 分) 设平面  $\pi$  过直线  $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-1}$ , 且平行于直线  $\frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ , 求平面  $\pi$  的方程。

八. (8 分) 已知线性方程组 
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + ky + 3z = 0 \\ 3x + 5y + kz = 1 \end{cases}$$
 有唯一解, 请决定参数  $k$  的取值范围, 并求出方程组相应的唯一解。

九. (10 分) 设  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上有非负的二阶导函数, 在  $x=0$  处连续, 并且  $f(0)=0$ , 证明: 对于任意的  $x_1 > 0, x_2 > 0$ , 都有  $f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$ 。

十. (6 分) 设  $a < b, f(x)$  是闭区间  $[a, b]$  上的非负连续函数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \int_a^b (f(x))^n dx \right]^{1/n} = \max_{a \leq x \leq b} f(x)。$$