# 复旦大学数学科学学院

# 2012～2013 学年第一学期期末考试试卷

# A 卷答案

课程名称：高等数学 A（上）　　课程代码：MATH120001

开课院系：数学科学学院　　考试形式：　闭卷

姓　名：＿＿＿＿＿＿　　学　号：＿＿＿＿＿＿　　专　业：＿＿＿＿＿＿

| 题 号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 总 分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得 分 | | | | | | | | | |

一.（本题共 24 分，每小题 6 分）

1.设函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^{x+y}-xy=1$ 确定，求二阶导数 $f''(0)$ ；

解：两边对 $x$ 求导，得 $e^{x+y}(1+y')-y-xy'=0$，

所以 $$y'=\frac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}},$$

继续对 $x$ 求导，得 $$y''=\frac{(e^{x+y}(1+y')-y')(x-e^{x+y})-(e^{x+y}-y)(1-e^{x+y}(1+y'))}{(x-e^{x+y})^2},$$

代入 $x=0,\ y=0,\ y'(0)=-1$，得 $y''(0)=-2$

2.计算 $\displaystyle\int\frac{4x+6}{x^2+4x+5}dx$；

解：原式 $$=2\int\frac{d(x^2+4x+5)}{x^2+4x+5}-2\int\frac{1}{x^2+4x+5}dx$$

$$=2\ln(x^2+4x+5)-2\arctan(x+2)+c$$

3.计算 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx$；

解：原式 $$=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3\sqrt{1+x^{-2}}}dx=-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}}dx^{-2}$$

$$=\sqrt{2}\ 。$$

4.求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\ln(1+xt)dt}{\tan x-\sin x}$.

解：$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^3(x\to 0)$，

令 $u=xt$，则　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\int_0^{x^2}\ln(1+u)du}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x^2)\cdot 2x}{4x^3}=1。$$

二.（本题共 24 分，每小题 6 分）

1.求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&3&-2&2\\2&-5&3&-1\\3&-2&1&1\\1&-1&3&-2\end{pmatrix}$ 的秩;

解：$A=\begin{pmatrix}1&3&-2&2\\2&-5&3&-1\\3&-2&1&1\\1&-1&3&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&-2&2\\0&-1&8&-7\\0&0&-27&24\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

所以　$\text{rank}(A)=3$。

2.设矩阵 $A,B$ 满足 $AB=3A+B$，其中 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}$，求矩阵 $B$；

解：可知 $(A-I)B=3A$，$A-I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&2\\0&2&0\end{pmatrix}$，$(A-I)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1/2\\0&1/2&0\end{pmatrix}$。

所以　$B=3(A-I)^{-1}A=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&3/2\\0&3/2&3\end{pmatrix}$。

3.设 A 是一个 $3\times 4$ 的矩阵，$\text{rank}(A)=2$，方程组 $Ax=b$ 有三个特解

$x^{(1)}=(1,-1,2,3)^T, x^{(2)}=(2,-1,3,4)^T, x^{(3)}=(1,-3,2,1)^T$,

求方程组 $Ax=b$ 的通解。

解：$x^{(2)}-x^{(1)}=(1,0,1,1)^T, x^{(3)}-x^{(1)}=(0,-2,0,-2)^T$ 为齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系，所以 $Ax=b$ 的通解为

$$x=(1,-1,2,3)^T+c_1(1,0,1,1)^T+c_2(0,-2,0,-2)^T\ (c_1,c_2\text{为任意常数})。$$

4.设 $f(x)=\begin{vmatrix} \sin 10x & 10e^{2x} & 2 \\ \sin 11x & 11e^{4x} & 4 \\ \sin 12x & 12e^{8x} & 8 \end{vmatrix}$，求 $f'(0)$ 的值。

解：$f'(x)=\begin{vmatrix} 10\cos 10x & 10e^{2x} & 2 \\ 11\cos 11x & 11e^{4x} & 4 \\ 12\cos 12x & 12e^{8x} & 8 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \sin 10x & 20e^{2x} & 2 \\ \sin 11x & 44e^{4x} & 4 \\ \sin 12x & 96e^{8x} & 8 \end{vmatrix}$，

所以　$f'(0)=0$。

三.（本题 8 分）求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2-2x+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+2x+1}\right)$。

解：令 $x=\dfrac{1}{t}$，则上述极限可化为

$$\lim_{t\to0+0}\frac{\sqrt[3]{1+t-2t^2+t^3}-\sqrt[3]{1-t+2t^2+t^3}}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+0}\frac{1+\frac{1}{3}(t-2t^2+t^3)+o(t)-(1+\frac{1}{3}(-t+2t^2+t^3)+o(t))}{t}$$

$$=\frac{2}{3}\text{。}$$

四.（本题 10 分）讨论方程 $xe^{-x}=a$ 的根的个数。

解：作 $f(x)=xe^{-x}-a$，则 $f'(x)=(1-x)e^{-x}$，

当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$。

即 $f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上严格单调增加；在 $[1,+\infty)$ 上严格单调减少，

注意到 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-a$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$f(1)=e^{-1}-a$ 为极大值也是最大值，

所以当 $a>e^{-1}$ 时，方程无根；

　　当 $0<a<e^{-1}$ 时，方程有两个根；

　　当 $a\le 0$ 或 $a=e^{-1}$ 时，方程有一个根。

五.（本题 10 分）设有方程组$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=4, \\ x_1+bx_2+x_3=3, \\ x_1+3bx_2+x_3=9. \end{cases}$，问 $a,b$ 为何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？有无穷多解时请求出其通解。

解：$(A|b)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 3b & 1 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & 3 \\ 0 & 1-ab & 1-a & 4-3a \end{pmatrix}$，

当 $b=0$ 时，$r(A)=2<3=r(A|b)$，方程组无解。

当 $b\neq 0$ 时，$(A|b)\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1-a & \dfrac{4b-3}{b} \end{pmatrix}$，

当 $a=1$ 且 $b\neq \dfrac{3}{4}$ 时，$r(A)=2<3=r(A|b)$，方程组无解。

当 $a\neq 1$ 且 $b\neq 0$ 时，$r(A)=3=r(A|b)$，方程组有唯一解。

当 $a=1$ 且 $b=\dfrac{3}{4}$ 时，$r(A)=2=r(A|b)$ 方程组有无穷多解，通解为

$x=(0,\ 4,\ 0)^T+c(-1,0,1)^T$。（$c$ 为任意常数）

六.（本题 10 分）设 A 是一个三阶实对称阵，其特征值为$1, 1, 3$，对应于特征值$\lambda = 3$的特征向量为$(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$。

（1） 求矩阵 A；

（2） 设 $\mathrm{R}^3$ 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 由 $\mathscr{A}(x) = Ax$ 所确定，求 $\mathscr{A}$ 在基$(1,0,0)^T$，$(1,1,0)^T$，$(1,1,1)^T$ 下的表示矩阵 B，问 A 与 B 是否相似，为什么？

解：（1）设$x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$为特征值$1$对应的特征向量，由实对称阵的性质，可知

$$(1,-1,0)^{\mathrm{T}} x = 0,$$

解此方程，得对应于特征值$1$的特征向量为$(1,1,0)^{\mathrm{T}}$和$(0,0,1)^{\mathrm{T}}$。

记 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\mathrm{A} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

（2）记$\beta_1 = (1,0,0)^T$，$\beta_2 = (1,1,0)^T$，$\beta_3 = (1,1,1)^T$，

则$\mathscr{A}(\beta_1) = (2,-1,0)^T$，$\mathscr{A}(\beta_2) = (1,1,0)^T$，$\mathscr{A}(\beta_3) = (1,1,1)^T$，

即 $\begin{cases} \mathscr{A}(\beta_1) = 3\beta_1 - \beta_2 + 0\beta_3, \\ \mathscr{A}(\beta_2) = 0\beta_1 + \beta_2 + 0\beta_3, \\ \mathscr{A}(\beta_3) = 0\beta_1 + 0\beta_2 + \beta_3. \end{cases}$ 或者 $\mathscr{A}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

所以$\mathscr{A}$在基$\beta_1, \beta_2, \beta_3$下的表示矩阵为$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

由于$\mathscr{A}$在自然基$e_1, e_2, e_3$下的表示矩阵为A，因此，A 与 B 相似。

七.（本题 8 分）平面图形D由曲线$y=2-\sqrt{x}$, $x=1$, $y=2$所围， 将上述图形D绕轴$x=1$旋转一周得到一个旋转体，求此旋转体的体积和表面积。

解：旋转体的体积$V=\pi\int_1^2((2-y)^2-1)^2dy=\dfrac{8}{15}\pi$。

表面积$A=\pi+2\pi\int_1^2(1-(2-y)^2)\sqrt{1+4(2-y)^2}dy$

$$=\pi+2\pi\int_0^1(1-x^2)\sqrt{1+4x^2}dx$$

$$=\frac{46+17\ln(2+\sqrt{5})}{32}\pi\text{。}$$

八.（本题 6 分）设$f$在$[0,1]$上二阶导数连续，$f(0)=f(1)=0$，证明

$$\max_{0\le x\le 1}|f(x)|\le\frac{1}{4}\int_0^1|f''(x)|dx\text{。}$$

证：记$a=\int_0^1|f''(x)|dx$，如果$f$为常数函数，结论成立。

否则$|f(x)|$的最大值在$(0,1)$内取到，记$x_0\in(0,1)$，使$|f(x_0)|=\max_{0\le x\le 1}|f(x)|$，

则 $f'(x_0)=0$。

不妨设$f(x_0)\ge 0$，

于是 $\forall u, v\in[0,1]$，$u\ge v$，

有 $\int_v^u|f''(x)|dx\ge\left|\int_v^u f''(x)dx\right|\ge f'(v)-f'(u)$，

所以 $f'(v)-f'(u)\le\int_0^1|f''(x)|dx=a$。

两边关于$v$在$[0, x_0]$上积分，得 $f(x_0)-x_0f'(u)\le ax_0$，

继续关于$u$在$[x_0,1]$上积分，得 $(1-x_0)f(x_0)-x_0(0-f(x_0))\le ax_0(1-x_0)$，

即 $f(x_0)\le ax_0(1-x_0)\le\dfrac{1}{4}a$。