

复旦大学数学科学学院
2017~2018 学年第二学期期末考试试卷

A 卷

课程名称: 高等数学 A (下) 课程代码: MATH120022

开课院系: 数学科学学院 考试形式: 闭卷

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 总分 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 得分 | | | | | | | | |

1. (本题共 40 分, 每小题 5 分) 计算下列各题

(1) 设 $z = (1 + xy)^2 \ln(1 + xy)$, 求 z'_x 。

(2) 解方程 $y' - \frac{2}{x}y = 2x^2$ 。

(3) 求椭球面 $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{2} = 1$ 上一点, 使得在这点的椭球面切平面与 $x - y + 2z = 4$ 平行。

(4) 求函数 $u = x^3 + 2y^2 - 3x - 12y$ 的极值。

(5) 计算 $\int_L (x+y)ds$ ，其中曲线 $L: x^2 + y^2 = 2x$ 。

(6) 计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ ，其中 Ω 由 $z = 3 - x^2 - y^2$ 和 $z = 0$ 所围。

(7) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{2^n} (x-2)^{2n}$ 的收敛半径与收敛区间。

(8) 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 被平面 $x + y + z = 0$ 所截的上半部分在 xoy 面上的投影区域的面积。

2. (本题共 10 分) 设 $y = x \ln x$ 是方程 $x^2 y'' + p(x)y' + y = 0$ 的一个解,

(1) 求 $p(x)$ 的表达式;

(2) 求解方程 $x^2 y'' + p(x)y' + y = x \ln x$ 。

3. (本题共 10 分) 设 $x = e^{u+v}, y = e^{u-v}$, 试将方程 $x^2 z''_{xx} + y^2 z''_{yy} + xz'_x + yz'_y = 0$ 从化为关于自变量 u, v 的方程 (假设 $z = z(x, y)$ 有连续的二阶偏导数)。

4. (本题共 10 分) 计算 $\iint_{\Sigma} (x^2 + 2yz)dydz + (y^2 + 2zx)dzdx + (z^2 + 2xy)dxdy$, 其中 Σ 为曲面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的上侧。

5. (本题共 10 分) 计算 $\int_L (e^x \cos y + y^2)dx + (2xy - e^x \sin y)dy$, 其中有向曲线 L 是 $y = x^2$ 从 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$ 的一段。

6. (本题共 10 分) 求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} x^n$ 的和函数。

7. (本题共 10 分) 证明 $\frac{3}{2}\pi < \iiint_{\Omega} \sqrt{x+2y-2z+5} dx dy dz < 3\pi$,

其中 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 。