复旦大学数学科学学院

2008～2009 学年第二学期期末考试试卷

《高等数学 A》（下）试题（答案）

1．（本题满分 48 分，每小题 8 分）（1） $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+x^2}$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$；

（2） $\dfrac{64}{15}$；（3）13；（4） $\dfrac{64}{15}\sqrt{2}a^4$；（5） $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$；（6） $\sin\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}x$。

2.（本题满分 10 分）$x+4y+6z+21=0$（在$(-1,-2,-2)$点）和 $x+4y+6z-21=0$（在$(1,2,2)$点）。

3．（本题满分 8 分）最长距离 $\sqrt{9+5\sqrt{3}}$，最短距离 $\sqrt{9-5\sqrt{3}}$。

4．（本题满分 8 分） $\dfrac{124}{5}\pi$。

5．（本题满分 8 分） $f(x)=e^{-2x}$。

6．（本题满分 10 分）（1） $x^2=\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$ （$-\pi\le x\le\pi$）;

（2）记 F 的 Fourier 系数为 A_n， B_n，则

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t^2dt\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x-t)dx=\frac{2\pi^2}{3}\cdot\frac{3}{\pi}=2\pi\text{；}$$

$$\begin{aligned}A_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t^2dt\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x-t)\cos nxdx\\&=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}t^2dt\int_{-\pi-t}^{\pi-t}g(u)\cos n(u+t)du\\&=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}t^2dt\int_{-\pi-t}^{\pi-t}g(u)[\cos nu\cos nt-\sin nu\sin nt]du\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t^2\cos ntdt\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-t}^{\pi-t}g(u)\cos nudu-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t^2\sin ntdt\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-t}^{\pi-t}g(u)\sin nudu\\&=\frac{4(-1)^n}{n^2}\cdot\frac{(-1)^n}{2n}=\frac{2}{n^3}.\end{aligned}$$

同理 $B_n=\dfrac{(-1)^n}{n^4}$。于是

（装订线内不要答题）

$$F(x) \sim \pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n^3}\cos nx + \frac{(-1)^n}{n^4}\sin nx\right]。$$

7．（本题满分 8 分）记 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$。

当 $x<0$ 时，$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!}=\cos\sqrt{-x}$；

当 $x\ge 0$ 时，设 $F(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{2n}}{(2n)!}$，则 $F''(y)=F(y)$，因此 $F(y)=C_1e^{y}+C_2e^{-y}$。

由 $F(0)=1$，$F(0)=0$ 得 $F(y)=\frac{1}{2}(e^{-y}+e^{-y})$。因此

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!}=F(\sqrt{x})=\frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}\right)。$$

于是，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$ 的和函数为

$$S(x)=\begin{cases}\cos\sqrt{-x}, & x<0,\\ \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}\right), & x\ge 0.\end{cases}$$

令 $x=1$ 便得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}=\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)。$$