

复旦大学数学科学学院

2010~2011 学年第二学期期末考试试卷

《高等数学 A》(下) 试题 (答案)

1. (本题满分 42 分, 每小题 7 分) (1) $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$; (2) $\frac{32}{9}$; (3) $\frac{1}{2}\pi ab$; (4) $2\pi^2(1+2\pi^2)$;

(5) $x^2 = \frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^2}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2}$, $x \in [0, 2]$; (6) $y = e^{2x} - \frac{1}{2} \sin 2x$ 。

2. (本题满分 8 分) $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$ 。 $f(0, 2) = f(0, -2) = -2$ 为最小值,
 $f(1, 0) = f(-1, 0) = 3$ 为最大值。

3. (本题满分 8 分) $3x - 9y - 12z + 17 = 0$ 。

4. (本题满分 8 分) $a\pi(a^2 - h^2)$ 。

5. (本题满分 8 分) π 。

6. (本题满分 8 分) $\frac{64}{5}\pi$ 。

7. (本题满分 8 分) $\frac{22}{27}$ 。

8. (本题满分 10 分) (1) 作变换 $u = y + \frac{x}{n^2}$ 可得 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \left(y + \frac{x}{n^2}\right)^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$, 的解为

$$y_n(x) = \frac{1}{n} \tan \frac{x}{n} - \frac{x}{n^2} \quad (n=1, 2, \dots)。$$

(2) 证 因为对于每个 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 有 $y_n(x) = \frac{1}{n} \tan \frac{x}{n} - \frac{x}{n^2} > 0$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 y_n(x)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^3 \frac{\tan \frac{x}{n} - \frac{x}{n}}{\left(\frac{x}{n}\right)^3} = x^3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t - t}{t^3} = x^3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sec^2 t - 1}{3t^2} = \frac{x^3}{3},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 y_n(x)$ 收敛。