复旦大学数学科学学院

2015～2016 学年第二学期期末考试试卷

A 卷

课程名称：高等数学（A）（下）　　课程代码：MATH120002

开课院系：数学科学学院　　考试形式：闭卷

题 号	1	2	3	4	5	6	7	总 分
得 分								

1. （本题共 40 分，每小题 5 分）计算下列各题

(1) 设 $z = xye^{x^2+y^2}$，求 z''_{xy}。

解：$z'_x = y(1+2x^2)e^{x^2+y^2}$，$z''_{xy} = (1+2x^2)(1+2y^2)e^{x^2+y^2}$。

(2) 解方程 $y''-3y'+2y = x^2$。

解：对应齐次方程有通解 $y = c_1e^x + c_2e^{2x}$，设原方程的一个特解为 $y^* = ax^2+bx+c$。代入原方程，$2a-3(2ax+b)+2(ax^2+bx+c) = x^2$，

得 $a = \dfrac{1}{2}, b = \dfrac{3}{2}, c = \dfrac{7}{4}$，

故原方程的通解 $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{4}$。

(3) 求椭球面 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{4} = 1$ 在点 $(1,-1,1)$ 处的切平面方程。

解：记 $F(x,y,z) = \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{4}-1$，则 $F'_x = x, F'_y = \dfrac{y}{2}, F'_x = \dfrac{z}{2}$，

在点 $(1,-1,1)$ 处的切平面方程为 $2(x-1)-(y+1)+z-1 = 0$。

(4) 求函数 $u = x^2+y^2-8x+4y$ 在 $D: x^2+y^2 \le 9$ 上的最值。

解：先求驻点，$u'_x = 2x-8, u'_y = 2y+4$，得驻点（4, −2），该点不在 D 内，所以函数在 D 内无驻点，这表明，函数在 D 上的最值应在边界 $\partial D: x^2+y^2 = 9$ 上取到。

姓 名：＿＿＿＿ 学 号：＿＿＿＿ 专 业：＿＿＿＿

（装订线内不要答题）

令 $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$，代入函数得 $u = 9 - 24\cos t + 12\sin t$，所以函数的最大值 $u_{\max} = 9 + 12\sqrt{5}$，最小值 $u_{\min} = 9 - 12\sqrt{5}$。

(5) 计算 $\int_L (x+y)ds$，其中 $L: x^2 + y^2 = 2x$。

解：由对称性，$\int_L yds = 0$，令 $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$

所以 $\int_L (x+y)ds = \int_0^{2\pi} (1+\cos t)dt = 2\pi$。

(6) 计算 $\iiint\limits_{\Omega} (x+y+z)dxdydz$，其中 $\Omega: (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \le 1$。

解：作坐标平移 $\begin{cases} u = x-1 \\ v = y-1 \\ w = z-1 \end{cases}$，则由对称性，

原式=$\iiint\limits_{\Omega'} (3+u+v+w)dudvdw = \iiint\limits_{\Omega'} 3dudvdw = 4\pi$，其中 $\Omega': u^2 + v^2 + w^2 \le 1$。

(7) 讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\ln^2 n}$ 收敛性。

解：由 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\ln^2 n}}{\dfrac{1}{n}} = +\infty$，而 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散，由比较判别法，原级数发散。

(8) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{3^n}(x-1)^n$ 的收敛半径与收敛区间。

解：$\rho = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\dfrac{n^3}{3^n}} = \dfrac{1}{3}$，所以收敛半径 $R = 3$，

当 $x = -2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^3$ 发散，

当 $x = 4$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$ 发散，所以收敛区间为 $(-2, 4)$。

2.（本题共 10 分）求级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和。

解：讨论幂级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)}x^n$，其收敛半径$R=1$，收敛区间为$[-1,1]$。

记$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)}x^n$， $x\in[-1,1]$，

则 $S(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n=\frac{x}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}x^{n-1}-\frac{1}{2x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$

$$=-\frac{x}{2}\ln(1-x)+\frac{1}{2x}\ln(1-x)+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x,\ x\in(-1,0)\cup(0,1),$$

于是$S(\frac{1}{2})=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2$，即 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2$。

3.（本题共 10 分）求$\int_{\mathrm{L}}(2x\sin y+y)dx+(x^2\cos y+2x)dy$，其中$L:x^2+y^2=2ax\ (a>0)$从(0, 0)到($2a$, 0)的上半圆周。

解：补充由对称性，$L_1:y=0,x:2a\mapsto 0$， $\int_{\Gamma}x^2ds=\int_{\Gamma}y^2ds=\int_{\Gamma}z^2ds$，

则由 Green 公式， $\int_{\mathrm{L+L_1}}(2x\sin y+y)dx+(x^2\cos y+2x)dy=-\iint_D dxdy=-\frac{1}{2}\pi a^2$，

而 $\int_{\mathrm{L_1}}(2x\sin y+y)dx+(x^2\cos y+2x)dy=\int_{2a}^{0}0dx=0$，

所以 $\int_{\mathrm{L}}(2x\sin y+y)dx+(x^2\cos y+2x)dy=-\frac{1}{2}\pi a^2$。

4.（本题共 10 分）求球面$x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$被平面$z=\frac{a}{4}$与$z=\frac{a}{2}$所夹部分的面积。

解：设所夹部分为$\Sigma:z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\ (\frac{3}{4}a^2\le x^2+y^2\le\frac{15}{16}a^2)$，

则$z'_x=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，$z'_y=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$， $\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，

于是所求面积$A=\iint_\Sigma dS=\iint_D\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$

$$=\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{\frac{\sqrt{15}}{4}a}\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}dr=\frac{1}{2}\pi a^2,$$

其中$D:\frac{3}{4}a^2 \le x^2+y^2 \le \frac{15}{16}a^2$。

5.（本题共 10 分）计算$\iint\limits_{\Sigma}(x+y^2z)dydz+(4y+1)dzdx+zdxdy$，其中$\Sigma$为曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le 1)$的下侧。

解：设有向曲面$\Sigma_1: z=1\,(x^2+y^2\le 1)$，取上侧。

由 Gauss 公式得

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(x+y^2z)dydz+(4y+1)dzdx+zdxdy=\iiint\limits_{\Omega}6dxdydz=2\pi \text{。}$$

而 $$\iint\limits_{\Sigma_1}(x+y^2z)dydz+(4y+1)dzdx+zdxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}dxdy=\pi\text{，}$$

于是 $$\iint\limits_{\Sigma}(x+y^2z)dydz+(4y+1)dzdx+zdxdy=\pi\text{。}$$

6.（本题共 10 分）设$f(x)=\sin(ax), x\in[-\pi,\pi)\,(a\text{不取整数})$，求其 Fourier 级数及 Fourier 级数的和函数$S(x)$。

解：$a_n=0, n=0,1,2,\cdots,$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin ax\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos(a-n)x-\cos(a+n)x)dx \\ &= \frac{(-1)^n 2n\sin a\pi}{(a^2-n^2)\pi}, n=1,2,\cdots \end{aligned},$$

所以$f(x)$的 Fourier 级数为

$$f(x)\sim\frac{2\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{a^2-n^2}\sin nx\text{。}$$

由收敛性定理，可知其和函数

$$S(x)=\begin{cases}\sin ax, & x\in(-\pi,\pi)\\ 0, & x=\pm\pi\end{cases}\text{。}$$

7.（本题共 10 分）设可微函数$f(x)$是方程$(x-2y^3)dx+3xy^2dy=0$的解且$f(1)=1$，(1)求$f(x)$的表达式；(2)讨论级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(f(n^3))^{\ln n}}{(\ln n)^n}$收敛性。

解：(1) 令$z==y^3$，方程可改写为 $z'-\frac{2}{x}z=-1$，解得 $z=x+cx^2$，由$x=1\text{时}, y==1$

可知$c=0$，所以 $f(x)=\sqrt[3]{x}$。

（2）级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(f(n^3))^{\ln n}}{(\ln n)^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{\ln^{n} n}$，

由$\lim_{n\to\infty} n^{\ln n}\Big/(\frac{\ln n}{2})^n=\lim_{n\to\infty}\exp\{\ln^2 n-n\ln\frac{\ln n}{2}\}$，

$$=\lim_{n\to\infty}\exp\{\sqrt{n}(\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}-\sqrt{n}\ln\frac{\ln n}{2})\}=0,$$

可得 当n充分大时，$n^{\ln n}\Big/(\frac{\ln n}{2})^n 2^n<\frac{1}{2^n}$，所以由比较判别法，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{\ln^{n} n}$ 收敛，

即 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(f(n^3))^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ 收敛。