复旦大学数学科学学院

2014～2015 学年第一学期期末考试试卷

《高等数学 A》（I）A 卷试题答案

（装订线内不要答题）

1．（本题满分 48 分，每小题 6 分）（1）$\dfrac{t}{2}$；（2）0；

（3）在 $(-\infty, 1]$ 上单调减少，在 $[1, +\infty)$ 上单调增加。$f(1) = -\dfrac{17}{12}$ 为极小值；

（4）在在区间 $\left(0, \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right)$ 上，曲线上凸；在区间 $\left(\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right)$ 上，曲线下凸。拐点为 $\left(\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}, -\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-3}\right)$；

（5）$-\cos x + \dfrac{1}{3}\cos^3 x + C$；（6）$\ln 2 - 2 + \dfrac{\pi}{2}$；（7）$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 8 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$；

（8）一定有解。

2．（本题满分 8 分）$a = -\dfrac{1}{2}$，$b = 1$。

3．（本题满分 8 分）（1）$\dfrac{4}{3}$；（2）是极小值点。

4．（本题满分 10 分）（1）$\dfrac{1}{4}\left(x_0^3 + 2x_0 + \dfrac{1}{x_0}\right) - \dfrac{2}{3}$；

（2）$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{3}\right)$。

5．（本题满分 8 分）**证**：作函数 $f(x) = \dfrac{1}{3}\tan x + \dfrac{2}{3}\sin x - x$，则

$$f'(x) = \frac{1}{3\cos^2 x} + \frac{2}{3}\cos x - 1,$$

$$f''(x) = \frac{2\sin x}{3\cos^3 x} - \frac{2}{3}\sin x = \frac{2}{3}\sin x \frac{1-\cos^3 x}{\cos^3 x} > 0, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)。$$

因此 f' 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 上严格单调增加，于是

$$f'(x) > f'(0) = 0, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)。$$

因此 f 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上严格单调增加，于是

$$f(x) > f(0) = 0, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)。$$

即

$$\frac{1}{3}\tan x + \frac{2}{3}\sin x > x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)。$$

6.（本题满分 8 分） $f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x}{(1+x)^3}}$ 。

7.（本题满分 10 分）**证：**设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，由 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$ 知 $\lambda^2 = 1$，即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1 或 -1。由 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$ 得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{0}$，可知 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 的列向量组是方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解，所以

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}) \le 3 - \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}), \text{ 即 } \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) \le 3。$$

另一方面，由于

$$3 = \operatorname{rank}(2\boldsymbol{I}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}) \le \operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}),$$

所以

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}) = 3。$$

这表明 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值为 1 和 -1 的特征子空间的维数之和等于 3，即 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量，于是 $\boldsymbol{A}$ 可以相似于对角矩阵。