

复旦大学数学科学学院
2012~2013 学年第一学期期末考试试卷

A 卷

课程名称: 高等数学 A (上) 课程代码: MATH120001

开课院系: 数学科学学院 考试形式: 闭卷

姓 名: _____ 学 号: _____ 专 业: _____

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得分									

一. (本题共 24 分, 每小题 6 分)

1. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $e^{x+y} - xy = 1$ 确定, 求二阶导数 $f''(0)$;

2. 计算 $\int \frac{4x+6}{x^2+4x+5} dx$;

3. 计算 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} dx$;

4. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(1+xt) dt}{\tan x - \sin x}$.

二. (本题共 24 分, 每小题 6 分)

1. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ 的秩;

2. 设矩阵 A, B 满足 $AB = 3A + B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 B ;

3. 设 A 是一个 3×4 的矩阵, $\text{rank}(A) = 2$, 方程组 $Ax = b$ 有三个特解

$$x^{(1)} = (1, -1, 2, 3)^T, x^{(2)} = (2, -1, 3, 4)^T, x^{(3)} = (1, -3, 2, 1)^T,$$

求方程组 $Ax = b$ 的通解。

4. 设 $f(x) = \begin{vmatrix} \sin 10x & 10e^{2x} & 2 \\ \sin 11x & 11e^{4x} & 4 \\ \sin 12x & 12e^{8x} & 8 \end{vmatrix}$, 求 $f'(0)$ 的值。

三. (本题 8 分) (1) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 2x + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 2x + 1} \right)$ 。

四. (本题 10 分) 讨论方程 $xe^{-x} = a$ 的根的个数。

五. (本题 10 分) 设有方程组
$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3bx_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$
 , 问 a, b 为何值时, 方程组无解? 有唯一

解? 有无穷多解? 有无穷多解时请求出其通解。

六. (本题 10 分) 设 A 是一个三阶实对称阵, 其特征值为 $1, 1, 3$, 对应于特征值 $\lambda = 3$ 的特征向量为 $(1, -1, 0)^T$.

(1) 求矩阵 A ;

(2) 设 \mathbf{R}^3 上的线性变换 \mathcal{A} 由 $\mathcal{A}(x) = Ax$ 所确定, 求 \mathcal{A} 在基 $(1, 0, 0)^T, (1, 1, 0)^T, (1, 1, 1)^T$ 下的表示矩阵 B , 问 A 与 B 是否相似, 为什么?

七. (本题 8 分) 平面图形 D 由曲线 $y = 2 - \sqrt{x}$, $x = 1$, $y = 2$ 所围, 将上述图形 D 绕轴 $x = 1$ 旋转一周得到一个旋转体, 求此旋转体的体积和表面积。

八. (本题 6 分) 设 f 在 $[0, 1]$ 上二阶导数连续, $f(0) = f(1) = 0$, 证明

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \leq \frac{1}{4} \int_0^1 |f''(x)| dx.$$