复旦大学数学科学学院

2011～2012学年第一学期期末考试试卷

A卷

课程名称：____高等数学A（上）____________ 课程代码：___MATH120001__

开课院系：_____数学科学学院___________ 考试形式：闭卷

姓 名：________________ 学 号：________________ 专 业：________________

题 号	1	2	3	4	5	6	7	总 分
得 分								

（装订线内不要答题）

1．（本题满分48分，每小题6分）计算下列各题：

（1）求曲线$e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$在点$(0,1)$处的切线方程；

（2）求极限$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{\ln(x^3+1)}}$；

（3）设函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+2$ 在 $x=1$ 点取极小值 0，且该函数的图像以 $(0,2)$ 为拐点，求 a， b， c 的值。

（4）设一元函数 f 满足 $\int xf(x)dx=\arcsin x+C$（C 是任意常数），求 $\int \frac{1}{f(x)}dx$；

（5）求定积分 $\int_{-\pi}^{\pi}(\sqrt{1+\cos 2x}+|x|\sin^3 x)dx$；

（6）若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=\int_{-\infty}^{a}xe^{2x}dx$，求常数 a；

（7）已知 $\boldsymbol{a}_1=(2,4,0)$，$\boldsymbol{a}_2=(-2,1,1)$，$\boldsymbol{a}_3=(4,-1,\ t)$，问 t 为何值时，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ 线性相关？

（8）已知 $\mathbf{R}^3$ 中的两组基为

$$\boldsymbol{a}_1=(1,1,-1)^T,\quad \boldsymbol{a}_2=(1,-1,1)^T,\quad \boldsymbol{a}_3=(-1,1,1)^T,$$

和

$$\boldsymbol{b}_1=(1,1,1)^T,\quad \boldsymbol{b}_2=(0,1,1)^T,\quad \boldsymbol{b}_3=(0,0,1)^T,$$

求从基{$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$}到基{$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$}的过渡矩阵。

2.（本题满分 8 分）求点 $(0,1)$ 到曲线 $y=x^2-x$ 的最短距离。

3.（本题满分 8 分）求曲线 $y=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{6x(e^{nx}-\sin e^{nx})}{(1+x^2)e^{3nx}}$（$x\in(-\infty,+\infty)$）与两条直线 $y=\dfrac{1}{2}x$ 和 $x=1$ 所围平面图形的面积。

4.（本题满分 9 分）问 λ 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases}(2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 4x_3 = 2, \\ -2x_1 - 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = -\lambda - 1\end{cases}$$

有唯一解、无穷多解、无解？请说明理由。

5.（本题满分 10 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&-6&2\end{pmatrix}$。

（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量；

（2）问 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵？若是，求正交矩阵 $\boldsymbol{S}$，使得 $\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$ 为对角矩阵；

（3）问 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是否相似？请说明理由。

6．（本题满分 9 分）设 $f(x)=\int_0^x (t-t^2)\sin^{2n} t dt$ （n是正整数），证明：当 $x\geq 0$时成立

$$f(x)\leq \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}。$$

7．（本题满分 8 分）设$1<a<b$， $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$，证明

$$0<f(b)-f(a)\le\frac{1}{4}(b-a)。$$

。