（装订线内不要答题）

复旦大学数学科学学院

2012～2013学年第二学期期末考试试卷

■ A 卷

课程名称： 高等数学A(下) 课程代码： MATH120002

开课院系： 数学科学学院 考试形式： 闭卷

姓 名：________ 学 号：________ 专 业：________

题 目	1	2	3	4	5	6	7	总分
得 分								

1.（本题满分42 分，每小题7 分）计算下列各题：

(1)设$z(x,y)=\left(\frac{x}{y}\right)^2\ln(3x-2y)$，求$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1)$.

(2)求空间曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点$(1,1,1)$处的切线方程。

(3)求椭圆抛物面$z = 1 + x^2 + 3y^2$、圆柱面$x^2 + y^2 = 1$及平面$z = 0$所围的有界区域的体积。

(4)计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega} \frac{(1+x+y+z)^2}{1+x^2+y^2+z^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中区域$\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

(装订线内不要答题)

(5)计算第二类曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Sigma$是上半球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，定向取上侧.

(6)一个雪球开始融化，假设它将时刻保持球形，且体积的融化率与表面积成正比，若在最初的一个小时内，其体积缩减为原来的$\dfrac{1}{8}$。计算雪球全部融化所需的时间。

2.（本题满分8 分） 设有一条光滑的空间曲线L, 其每一点处的切线与z轴的夹角均为$\dfrac{\pi}{4}$. 证明L上任意两点$A(x_1, y_1, z_1)$与$B(x_2, y_2, z_2)$间的弧长为$\sqrt{2}|z_2 - z_1|$.

3.（本题满分8 分） 设$f(x)$在$\mathbb{R}$上二阶可导，讨论$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\dfrac{1}{n})$的敛散性。

（装订线内不要答题）

4.（本题满分10 分） 设$f(x)$在$[1,+\infty)$上二阶连续可导，$f(1)=0$, $f'(1)=1$, 函数$z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$满足方程$z_{xx}+z_{yy}=0$. 求函数$f(x)$.

5.（本题满分10 分） 计算第二类曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+4y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=1$，定向取外侧.

（装订线内不要答题）

6.（本题满分10 分） 设$f(x)$是以2π为周期的函数且$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,\pi];\\ 0, & x\in(-\pi,0).\end{cases}$

(1)求$f(x)$的Fourier展开式，并分别计算和函数在$\dfrac{7\pi}{2}$及7π处的值；

(2)求实系数$A_0,A_1,\dots,A_{10}$和$B_1,B_2,\dots,B_{10}$使下面的积分：

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[\big(f(x)-g(x)\big)^2+g^2(x)\right]\mathrm{d}x$$

达到最小值，其中函数$g(x)=\dfrac{A_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\big(A_n\cos nx+B_n\sin nx\big)$.

7.（本题满分12 分） 分别在下述两种情况下讨论，是否存在常数a, λ使得积分

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

在区域$D = \mathrm{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ 内与路径无关？证明你的结论。

$(1) P = \dfrac{ay}{x^2+y^2},\ Q = \dfrac{x^\lambda}{x^2+y^2}$;　$(2) P = \dfrac{axy^2}{(x^2+y^2)^2},\ Q = \dfrac{-4yx^\lambda}{(x^2+y^2)^2}$.