

复旦大学数学科学学院  
2009~2010 学年第二学期期末考试试卷

A 卷

课程名称: 高等数学 A (下) 课程代码: MATH120002

开课院系: 数学科学学院 考试形式: 闭卷

姓名: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_ 专业: \_\_\_\_\_

题号	1	2	3	4	5	6	7	总分
得分								

1. (本题满分 48 分, 每小题 8 分) 计算下列各题:

(1) 设函数  $z = z(x, y)$  由方程  $x + y - z = e^z$  所确定, 求  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

(2) 求二元函数  $f(x, y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$  的极值。

(装订线内不要答题)

(3) 计算二重积分  $\iint_D \arctan \frac{y}{x} dx dy$ , 其中  $D$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 4$  及直

线  $y = 0$ ,  $y = x$  在第一象限所围的闭区域。

(4) 计算第一类曲线积分  $\int_L y ds$ , 其中曲线  $L$  为上半心脏线, 其极坐标表示为  $r = a(1 + \cos \theta)$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ), 其中  $a > 0$ 。

(5) 计算第二类曲面积分  $\iint_{\Sigma} xyz dx dy$ , 其中  $\Sigma$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  在  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  的部分, 并定向为下侧。

(6) 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{n+2}{2n+1} \right)^{4n} x^n$  的收敛半径和收敛域。

2. (本题满分 8 分) 设  $V$  是由椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  在第一卦限上的点处的切平面和三个坐标平面所围成的四面体体积 ( $a > 0, b > 0, c > 0$ ), 求  $V$  的最小值。

3. (本题满分 8 分) 计算第二类曲线积分  $\int_L (\sin y + y)dx + x \cos y dy$ , 其中  $L$  为曲线  $y = x(\pi - x)$  在第一象限的部分, 方向为从  $A(0, 0)$  到  $B(\pi, 0)$ 。

4. (本题满分 8 分) 已知螺旋面片  $\Sigma: x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = \theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1$ ), 计算第一类曲面积分  $\iint_{\Sigma} \sqrt{x^2 + y^2} dS$ 。

5. (本题满分 10 分) 设  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}}, x \in [0, \pi]$ 。

(1) 将  $f$  展开为余弦级数; (2) 求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+4n^2}$  的和。

6. (本题满分 8 分) 计算第二类曲面积分  $\iint_{\Sigma} xy^2 dydz + yz^2 dzdx + zx^2 dxdy$ , 其中  $\Sigma$  是

椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的外侧。

7. (本题满分 10 分) 已知幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$ 。(1) 求其收敛域; (2) 若记该幂级

数的和函数为  $S(x)$ , 且已知  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , 证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} S(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ 。